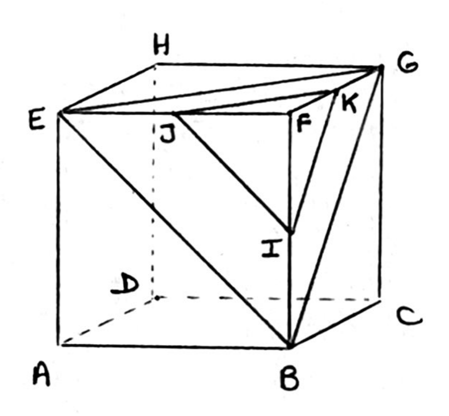
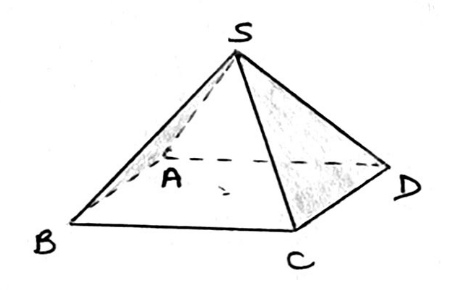
1p283 : Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, I, J, K sont les milieux des arêtes [FB], [FE] et [FG]. Démontrer que les plans IJK et BEG sont parallèles.



(On montre que 2 dtes sécantes de l'un sont // à 2 dtes sécantes de l'autre. Ici :
(IJ) // (EB) et (JK) // (EG) d'après le Th. d.d.m)

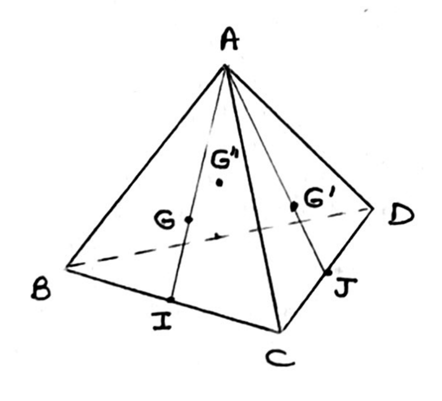
2p283 : Voici une pyramide régulière dont la base est carrée. Les triangles SAB, SBC, SCD, SDA sont équilatéraux. Montrer que l'intersection des plans SAB et SCD est une dte parallèle au plan ABCD.



(Ces 2 plans s'interceptent suivant une droite passant par S. Soit Δ la dte passant par S et parallèle à (CD). Elle est dans le plan SCD. Comme (CD) // (AB), Δ sera dans le plan SAB. C'est donc la dte cherchée !)

25p287 : Soient ABCD un tétraèdre, G, G' et G'' les cdg des faces ABC, ACD et ADB, I et J les milieux des arêtes [BC] et [CD].

1) Mq les dtes (IJ) et (GG') sont parallèles,
2) Prouver que les pts G, G', G'' ne sont pas alignés,
3) Mq les plans GG'G'' et BCD sont parallèles.

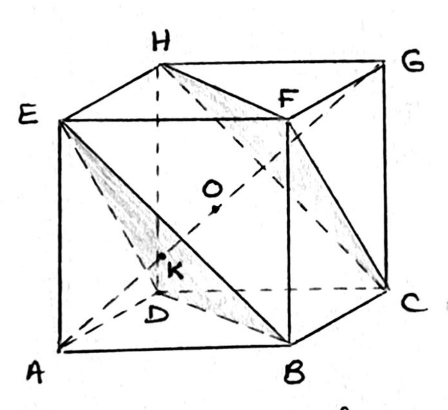


(Sol. 1) Réc. Thalès dans le plan AIJ
2) Par l'absurde. D'après 1) (GG') // (IJ) et (GG'') // (IK) où K milieu de [BD]. Si G, G', G'' alignés, alors (IK) // (IJ) ⇒ K ∈ (IJ). C'est absurde car (IJ) // (BD) et K ∈ (BD) ne peut pas être sur (IJ).
3) car (GG') // (IJ) et (GG'') // (IK).)

(réf. pour ces 3 ex : Fractale de 2nd, © 90)

Obj. : – Réinvestir les acquis concernant le // et l'⊥ de plans et de droites dans l'étude d'un solide bien connu.
– Préciser la vision du cube dans l'espace.

ex : Quelques sections planes du cube : La fig. ci-contre représente un cube dont les arêtes mesurent 6 cm.



1) a) Nature du triangle BDE ? Calculer son aire. $-18\sqrt{3}$

b) Soit K le cdg de BDE. Montrer que K est aussi le cdg de ACE. →(EK) coupe [DB] en son milieu I, qui est aussi le milieu de [AC]. (EI) est donc médiane de EDB et de ACE et K est situé au $\frac{1}{3}$ de la base I, donc K = cdg de ACE.

c) Nature du triangle CFH ? Quelle est son aire ?

d) Mq le cdg L de CFH est le cdg de CGE.

2) Dessiner le quadrilatère ACGE en vraie grandeur. Quelle est sa nature ? Placer les points K et L, puis justifier l'alignement des pts A, K, O, L, G. Montrer que AK = KL = LG

↙ Obj. : Transformer un pb spacial en un pb plan. Mettre en oeuvre la technique de résolution consistant à remplacer un pb en un pb plus simple, etc

K cdg de ACE ⇒ A, K, O alignés et $AK = \frac{2}{3}AO$
L cdg de CGE ⇒ G, L, O " et $GL = \frac{2}{3}GO$
O milieu de [AG]
} ⇒ A, K, O, L, G alignés et $AK = KL = LG = \frac{AG}{3}$

3) a) Comparer les directions des droites (DB) et (FH). DBFH est un rectangle...

b) Mq les plans BDE et CFH sont parallèles. car FH // DB et FC // ED

4) a) Déterminer le plan médiateur de [ED] c'est le plan HBGH

b) " " [BD] " " ACGE

c) Mq (AK) est perpendiculaire au plan BDE
(AK) ⊂ plan HBGH $\overset{a)}{\Rightarrow}$ (AK) ⊥ (ED)
(AK) ⊂ plan ACGE $\overset{b)}{\Rightarrow}$ (AK) ⊥ (BD)
donc (AK) ⊥ (BDE)

5) D'après 4), [AK] est la hauteur du tétraèdre ABDE issue de A.

a) Calculer le volume du tétraèdre en prenant le triangle ABD pour base. 36 cm³

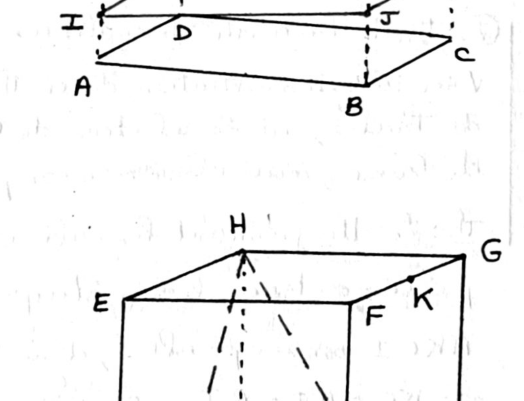
b) En déduire AK. Vérifier que $AK = \frac{1}{3}AG$ $\underset{18\sqrt{3}}{S_{BDE}} \times \frac{AK}{3} = 36 \Rightarrow AK = 2\sqrt{3}$
Comme $HG = 6\sqrt{3}$, $\frac{AK}{AG} = \frac{1}{3}$.

c) Longueur GL ? Retrouver AK = KL = LG
idem

(similaire et où cette version est utile : "groupe du cube" [T] Isométries)
(réf. TP3 p 352, Fractale 90 de 2nd)

① ABCD et A'B'C'D' sont 2 parallélogrammes de l'espace. Soient I, J, K, L les milieux de [AA'], [BB'], [CC'], [DD'].
Mq IJKL est un parallélogramme.

(réf. Sortais 88, ex 1 p 29)
(Sol. : $\begin{cases} \vec{IJ} = \vec{IA'} + \vec{A'B'} + \vec{B'J} \\ \vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AB} + \vec{BJ} \end{cases}$ donc $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{A'B'})$ ...)

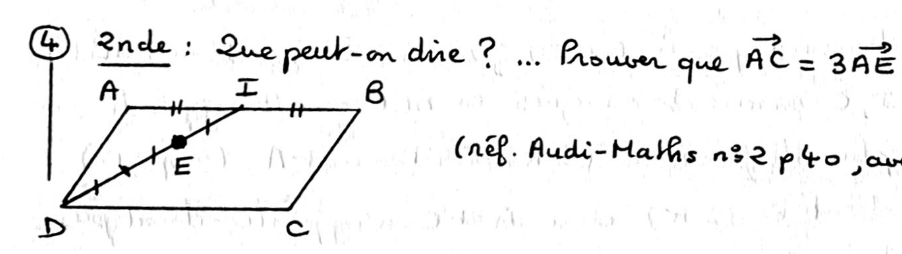


② I, J, K sont les milieux des arêtes [AD], [BC] et [FG] du cube ABCDEFGH ci-contre
a) Mq les pts A, I, G, K sont coplanaires et sommets d'un parallélogramme.
b) Mq (AK) est parallèle au plan (HIJ)

(réf. Sortais 88, ex 2 p 29)
(Sol : b) exprimer $\vec{AK}$ en fct des vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IH}$)

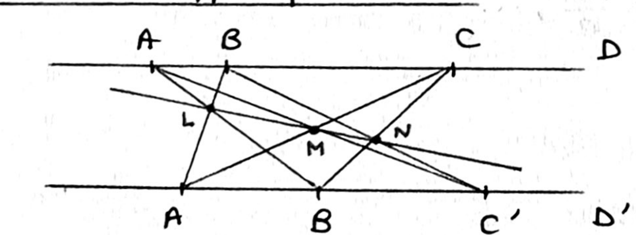
③ 4ème : Chemin le plus court de A à B, en lignes droites, sachant que l'on doive atteindre un pt M sur la dte D ?

④ 2nde : Que peut-on dire ? ... Prouver que $\vec{AC} = 3\vec{AE}$



(réf. Audi-Maths n°2 p 40, avec un intéressant commentaire)

⑤ TC : Th. de Pappus quand D // D'



Mq L, M, N sont alignés.
(Utilise les homothéties-translations. cf [T] espaces affines)

⑥ 5ème : ABC triangle
I, J milieux resp. de [AB], [AC]
M, N sym. de C, B / à I, J.
Que dire des points M, A et N ?

Sol : On vérifie que ACBM et ANCB sont des parall., d'où (MA) // (BC) // (AN) puis (MA) = (AN). Le Thddm permet aussi de prouver que MA = 2 IJ = AN, et que 2 IJ = BC.

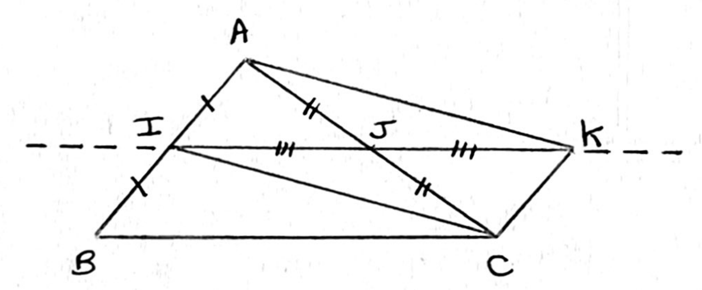
Prol. : déduire de cette figure que la somme des angles d'un triangle vaut un plat.

⑦ Th. de la droite des milieux

Voici une démonstration de ce Th. ddm en 4ème, qui n'utilise donc ni le théorème de Thalès, ni la relation de Chasles pour les vecteurs. On la trouve dans les manuels de 4ème, mais elle est incomplète.

Th : La dte joignant les milieux des 2 côtés d'un triangle est // au 3e côté (...)

preuve : on trace le symétrique K de I /à J



AKCI est un parall., d'où (KC) // (BI) et KC = AI = BI. De là on déduit que IKCB est un parallélogramme.
Le raisonnement est incomplet car

$$\left.\begin{array}{l}(KC) \parallel (BI)\\ KC = BI\end{array}\right\} \Rightarrow KCBI \text{ parall.}$$

est une implication fausse. Pour qu'elle devienne vraie, il faut rajouter l'hypothèse : KCBI n'est pas croisé, ie B et C appartiennent au m̂ demi-plan de frontière (IK).

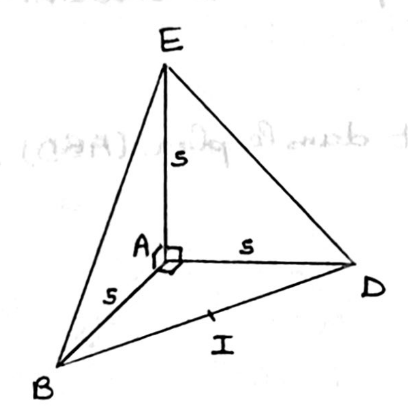
Montrons-le : A et B n'appartiennent pas à (IJ), sinon J étant le milieu de [AC], les points A, B, I, J, C seraient alignés et ABC serait aplati.
Notons P_A (resp P_B) le demi-plan de frontière (IK) contenant A (resp. B).
Le milieu J de [AC] appartient à (IK) donc A et C n'appartiendront pas au même demi-plan de frontière (IK), donc $C \in P_B$ CQFD.

Prolongement : on déduit aussi $IJ = \frac{BC}{2}$, ...

Obj. : – Prouver des résultats utilisés en collège

– Traiter le prog. de 2nd : "Propriétés usuelles (admises) de l'orthogonalité de 2 droites, d'une droite et d'un plan..."

ex : <u>Droites perpendiculaires à un plan</u>



ABDE tétraèdre

$\widehat{EAD} = \widehat{EAB} = \widehat{BAD} = 90°$

$EA = AD = AB = 5$ cm

1) Soit I le milieu de [BD]

a) Nature de BDE   équilatéral car $BD = DE = EB = 5\sqrt{2}$. Ainsi $(EI) \perp (BD)$.

b) Dessiner ABD et BDE en grandeur nature

c) Calculer AI et EI. En déduire que $(AE) \perp (AI)$

($AI = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $EI = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ d'où Pyth. $EI^2 = EA^2 + AI^2$.)

2) Soit Δ une droite du plan ABD passant par A et coupant (BD) en M.

Soit $\overrightarrow{IM} = x\,\overrightarrow{IB}$

a) Exprimer IM^2, puis AM^2, EI^2 et EM^2 en fonction de x

($IM^2 = \frac{25}{2}x^2$; $AM^2 = AI^2 + IM^2 = \frac{25}{2} + \frac{25}{2}x^2$; $EI^2 = \frac{75}{2}$; $EM^2 = EI^2 + IM^2 = \frac{75}{2} + \frac{25}{2}x^2$ car $(EI) \perp (BD)$ (BDE équilatéral))

b) En déduire que EAM est rectangle en I, ie $(EA) \perp \Delta$ (réc. de Pyth.)

3) Soit Δ une dte du plan ABD passant par A et parallèle à (BD).

a) Dessiner en vraie grandeur la figure obtenue dans le plan ABD

b) Tracer le symétrique D' de D /à A. Que représente Δ pour [BD'] ?

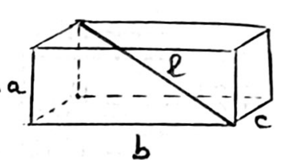
c) Notons I' l'intersection de Δ et [BD']. Montrer que $(EA) \perp \Delta$ en utilisant le 1). (1.c ⇒ $(AE) \perp (AI')$)

<u>Ccl</u> : La dte (EA) perp. aux 2 dtes (AB) et (AD) sera perpendiculaire à toutes les dtes du plan ABD passant par A.

(réf. Inspiré du TP1 p 341 du Fractale 2nd, éd. 90)

4) <u>Application</u> :

Calculer la longueur de la diagonale du parallélépipède rect.



5) Soit Δ une dte passant par A et perpendiculaire à (EA). On veut montrer que Δ est incluse dans le plan ABD :

Le plan P contenant (EA) et Δ coupe le plan ABD suivant une dte Δ'.

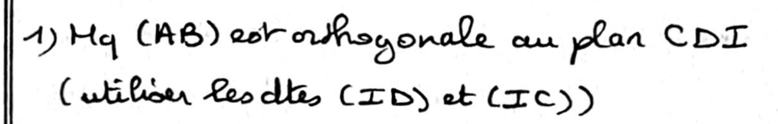
Montrer que $\Delta = \Delta'$. (Gn sait : $\Delta' \subset ABD \Rightarrow \Delta' \perp (EA)$ – Δ et Δ' sont perp. à (EA), dans P, et passent par A, donc $\Delta' = \Delta$)

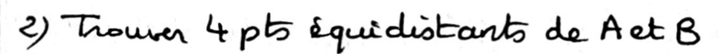
<u>Ccl</u> : Une dte est perp. à (EA) ssi elle est dans le plan (ABD). Le plan ABD et la dte (EA) sont dits <u>orthogonaux</u>.

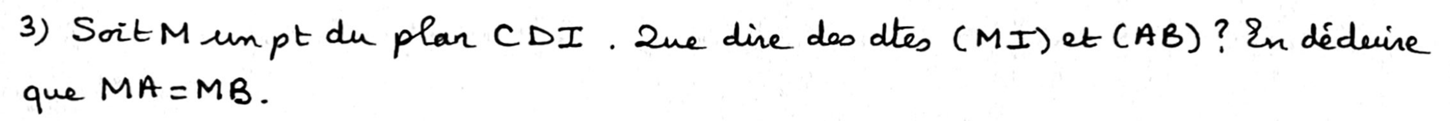
Obj. : – Introduire le plan médiateur d'un segment.
– Couvrir cette partie du programme de 2nd.
– Réinvestir les notions acquises au sujet de l'orthogonalité d'1 dte et d'1 plan.

ex : Plan médiateur d'un segment

ABCD tétraèdre régulier
I, J milieux de [AB], [CD].


1) Mq (AB) est orthogonale au plan CDI
(utiliser les dtes (ID) et (IC))

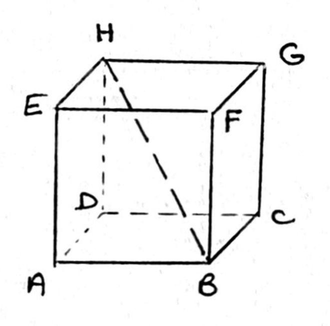

2) Trouver 4 pts équidistants de A et B


3) Soit M un pt du plan CDI. Que dire des dtes (MI) et (AB) ? En déduire que MA = MB.

4) Réc., si M vérifie MA = MB, prouver que M est dans le plan CDI.
↘ AMB isocèle ⇒ $(AB) \perp (MI)$ ⇒ $M \in$ plan orth. à (AB) passant par I. C'est CDI.

Ccl : L'ens. des pts équidistant de A et B est le plan orthogonal à (AB) passant par le milieu de [AB]. C'est le plan médiateur de [AB].

Obj. : – Exercice d'application



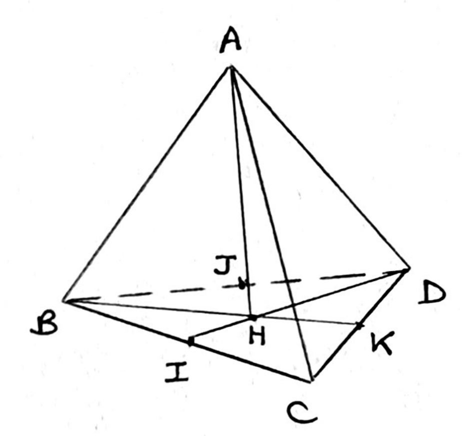
ex : ABCDEFGH est un cube.
Mq (AF) et (BH) sont orthogonales.

Sol. : 1° solution : B et H sont à égale distance de A et F, donc appartiennent au plan médiateur de [AF]. Donc $(AF) \perp (BH)$. CQFD

2° solution : $(AF) \perp (EB)$ et $(AF) \perp (EH)$ (car (AF) est incluse dans le plan ABFE perpendiculaire à (EH)). (AF) sera perp. au plan BEH, donc orthogonale à (BH).
CQFD

(réf. Fractale 2nd prog. 90, AP 2 p 343 et 1 p 354)

Obj. – Application du cours concernant le // et l'⊥ de dtes et plans dans l'espace.



ex : Hauteur d'un tétraèdre régulier

1) ABCD désigne un tétraèdre régulier dont les arêtes mesurent 8 cm, H le cdg du triangle équilatéral BCD, I, J, K les milieux de [BC], [BD], [CD].

a) En utilisant le plan AID, montrer que (BC) ⊥ (AH) → AID est le plan médiateur de [BC] (car A, I, D équidistants de B et C) donc est perp. à [BC] en son milieu..

b) " " ABK, " (CD) ⊥ (AH)

c) En déduire que (AH) est orthogonale au plan BCD.

2) a) Dessiner le triangle ABK en vraie grandeur. Est-il équilatéral ?

b) Quelle est la hauteur issue de A du triangle ABK ?

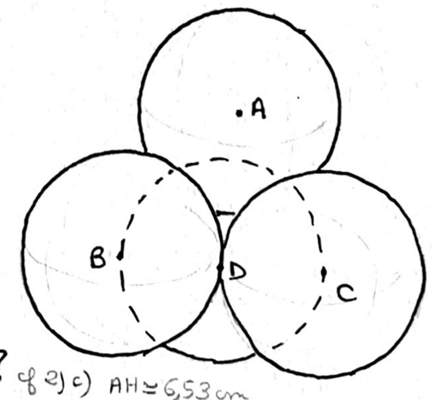
c) Calculer la longueur BH, puis AH. $= \sqrt{AB^2 - BH^2} = 8\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 6{,}53$ cm

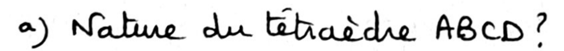
$BH = \frac{2}{3}BK$ où $BK = 8\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, donc $BH = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

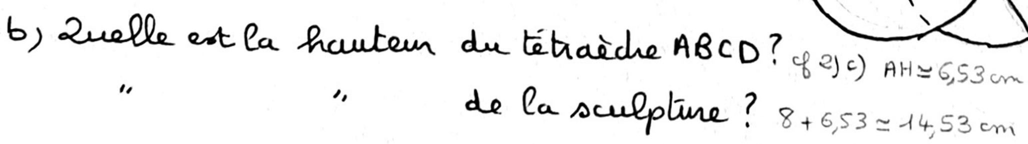
3) Quel est le volume de ce tétraèdre ? $\frac{1}{3} \cdot \frac{8 \times 4\sqrt{3}}{2} \cdot 8\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{128}{3}\sqrt{2} \simeq 60{,}34$ cm³

4) Application :

Une sculpture est composée de 4 sphères de rayon 4 cm disposé suivant la figure : Les sphères sont tangentes 2 à 2. On note A, B, C, D leurs centres.




a) Nature du tétraèdre ABCD ?


b) Quelle est la hauteur du tétraèdre ABCD ? cf 2) c) AH ≃ 6,53 cm

" " de la sculpture ? 8 + 6,53 ≃ 14,53 cm

(réf. TP1 p 350, Fractale 2nd, 90)